



Beszámoló az 1999. évi Eötvös-versenyről

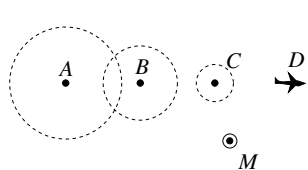
1999. október 15-én rendezte meg az Eötvös Loránd Fizikai Társulat hagyományos őszi tanulóversenyét, az Eötvös-versenyt, melyen 156 hazai, 3 szlovákiai és 1 romániai versenyző indult. Az első feladatot 15 versenyző tudta hibátlanul megoldani, a másodikat 40, a harmadikra azonban csupán egy tökéletes megoldás érkezett. Részben jó megoldás elég sok volt.

Ismertetjük a feladatokat, azok helyes megoldását, végül a verseny végeredményét.

1. Egy szuperszonikus vadászgép 900 m magasan repül el felettünk, vízszintes irányban. 1 km messze van tőlünk, amikor először meghalljuk a hangját. Milyen irányból halljuk a repülőgép hangját akkor, amikor már 2 km messze van tőlünk a gép?

(Radnai Gyula)

Megoldás. Az *1. ábrán* az *M* megfigyelő fölött elhaladó repülőgépből egyenlő időközönként kibocsátott hanghullámokat ábrázoltuk.

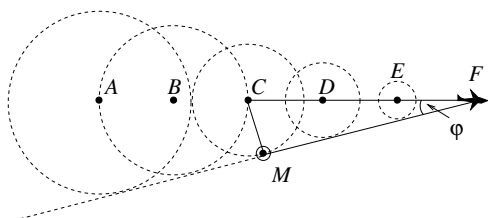


1. ábra

A szuperszonikus repülőgép sebessége nagyobb, mint a hang sebessége a levegőben. Jól látszik, hogy a repülőgép már elhaladt a megfigyelő felett, de a hangja még nem ért el a megfigyelőhöz. Az *1. ábrán* a repülőgép éppen a *D* pontban van, ez előtt τ idővel volt a *C* pontban, 2τ idővel előtte a *B* pontban, 3τ idővel előtte az *A* pontban. $AB = BC = CD = v\tau$ (v a repülőgép sebessége).

Természetesen a közbülső pontokban is bocsát ki hangot a repülőgép, az áttekinthetőség kedvéért ezeket nem tüntettük fel.

Akármeekkora τ időközöt választhatunk az ábrázolásra, most azonban éppen akkorát választottunk, hogy az *1. ábrán* ábrázolt helyzethez képest pontosan 2τ idő múlva érjen el az *M* megfigyelőhöz a repülőgép hangja; ezt mutatja a *2. ábra*. Itt a repülőgép már az *F* pontban van, s a *C* pontból indult hanghullám éppen *M*-be ért. (A többi pontból jövő hang még nem érte el *M*-et.)



2. ábra

Mivel $\overrightarrow{CM} \perp \overrightarrow{FM}$, a CMF háromszög derékszögű. Ameddig a gép megtette a CF utat, addig a hang a CM távolságot futotta be. (Ábránkon ez az idő 3τ .) Az összes pontból jövő hanghullám eredője az a kúp alakú „fejhullám-felület”, amelynek egyik alkotója a *2. ábrán* az FM egyenes. E kúp fél nyílásszöge az ún. Mach-szög,

amelyre

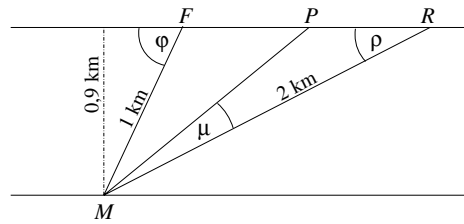
$$\sin \varphi = \frac{c}{v}$$

(c a hangsebesség, $v \geq c$). Ennek az általánosan érvényes összefüggésnek a felhasználásával fogjuk megoldani a feladatot.

Tekintsük a 3. ábrát, melyen a balról jobbra haladó repülőgép az F pontban van, amikor először jut el a hangja az M pontba. Az ábrából leolvasható, hogy a Mach-szögre (a megadott adatok felhasználásával)

$$\sin \varphi = \frac{0,9 \text{ km}}{1 \text{ km}} = 0,9,$$

ahonnan $\varphi = 64,16^\circ$.



3. ábra

Abban a pillanatban, amikor a repülőgép az M megfigyelőtől 2 km távol lévő R pontban van, a megfigyelő azt a hangot hallja, amit a gép egy korábbi időpontban adott ki. Ahol ekkor volt a repülőgép, azt a pontot jelöljük P -vel. Feladatunk tehát az MP irány meghatározása. Kérdezhetjük például azt, hogy ez az irány mekkora szöggel marad le az MR iránytól, vagyis hány fokkal hátrábbról halljuk a hangot, mint ahol látjuk a gépet. Ezt a szöget (melyet a 3. ábrán μ -vel jelöltünk) az MPR $\triangle$ -ből a szinusztétel segítségével határozhatjuk meg:

$$\frac{\sin \varrho}{\sin \mu} = \frac{PM}{PR}.$$

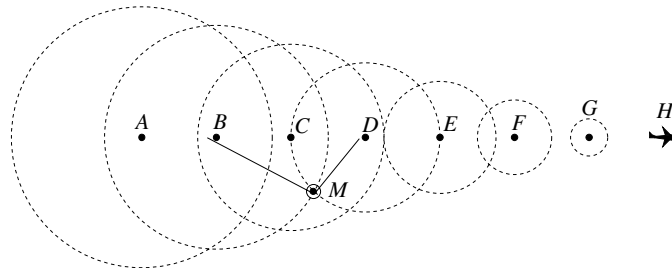
Mivel $\sin \varrho = \frac{0,9 \text{ km}}{2 \text{ km}} = 0,45$ (ahonnan $\varrho = 26,74^\circ$), valamint

$$\frac{PM}{PR} = \frac{ct}{vt} = \frac{c}{v} = \sin \varphi = 0,9,$$

ezért

$$\sin \mu = \frac{0,45}{0,9} = \frac{1}{2}, \quad \text{azaz} \quad \mu_1 = 30^\circ, \quad \text{illetve} \quad \mu_2 = 150^\circ.$$

Meglepőnek tűnhet, hogy a μ szögre két érték is adódott, pedig csak egy hegyesszögre számítottunk. Vajon a tompaszög is megoldása az eredeti fizikai problémának? Bizony az! Már a 2. ábrából is látszik, hogy ha a repülőgép túlhaladt az



4. ábra

F ponton, akkor nemcsak a C pont utáni helyekről (pl. D -ből és E -ből) induló hullámok érik el fokozatosan az M pontot, hanem egyidejűleg azok a hullámok is odaérnek, amelyeket még a C pontba érkezése előtt bocsátott ki a gép (pl. B -ből, A -ból). Egy ilyen helyzetet mutat a 4. ábra, ahol éppen a B és a D pontok közeléből indult hullámok érik el egyszerre M -et. (A C -ből indult hullám már túlhaladt M -en). Az első „hangrobbanás” után tehát mindig két irányból halljuk a repülőgép hangját, igaz, általában az „előlről” jövőt halljuk erősebben.

Megjegyzés. A megoldók a hallott hang MP irányának meghatározásakor általában a vízszintes vagy függőleges iránnyal bezárt szögeket adták meg. A helyes eredmények a vízszintessel bezárt szögekre: $\mu_1 + \varrho = 56,74^\circ$, illetve $180^\circ - (\mu_2 + \varrho) = 3,26^\circ$; a függőlegessel bezárt szögek pedig: $90^\circ - (\mu_1 + \varrho) = 33,26^\circ$ és $\mu_2 + \varrho - 90^\circ = 86,74^\circ$.

2. Két egyébként egyforma lombik közül az egyiknek a nyaka egyenes, a másiké lefele görbül, az ábra szerint. A két lombikba azonos mennyiségű

A) vizet,

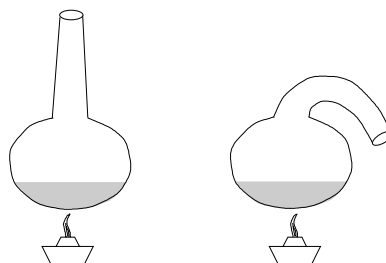
B) étert

töltünk, és gondoskodunk róla, hogy mindkét lombikban a folyadék hőmérséklete

az A) esetben 100°C ,

a B) esetben $34,6^\circ\text{C}$

legyen. Melyik lombikból fog el hamarabb a folyadék az egyik, illetve a másik esetben?



(Károlyházy Frigyes)

Megoldás. A megadott 100°C a víz, $34,6^\circ\text{C}$ pedig az éter normál nyomás melletti forráspontja. A víz móltömege 18 g/mol , az éter $[(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{O}]$ móltömege 74 g/mol . Igaz, a forráspont környékén egyetlen reális gáz sem viselkedik ideális gázként, az mégis joggal feltételezhető, hogy a vízgőz sűrűsége kisebb, az étergőz sűrűsége pedig nagyobb marad a levegő sűrűségénél. (A vízgőz „könnyebb”, az étergőz „nehezebb” a levegőnél.)

Tekintsük először az A) esetet, amikor mindkét lombikba vizet töltöttünk. Ekkor az egyenes nyakú lombikban képződő vízgőz előbb-utóbb betölti a lombik nyakát, azonban nem maradhat stabilan a nála „nehezebb” levegő alatt, hanem felszáll, helyet adva a levegőnek, valamint az újabb és újabb vízgőzképződésnek; így a víz hamarosan elforr.

A görbe nyakú lombik nyakát is betölti a vízgőz, innen azonban csak „lefelé” tudna kiszabadulni, miközben a sűrűbb levegőnek kellene felfelé, a vízgőz helyére áramlania. Ez nem történik meg olyan hevességgel, mint az egyenes nyakú lombiknál, mert most csak diffúzióval tud eltávozni a vízgőz, ami viszont lassú folyamat. Az A) esetben tehát a vízgőz az egyenes nyakú csőből szabadul ki gyorsabban, vagyis ebből a lombikból forr el hamarabb a víz.

Nyilvánvaló, hogy a B) esetben, amikor a forráspontján tartott éter van a lombikokban, a helyzet éppen fordított. Az egyenes nyakú lombik nyakában megül az étergőz, nem fog felszállni a nála kisebb sűrűségű levegőbe. A nyak felső végénél diffundálnak az étermolekulák a levegőbe, ezért csak hosszú idő alatt forr el és távozik az éter a lombikból.

A lefelé görbülő nyakú lombik nyakából viszont „kifolyik” a nehéz étergőz a levegőbe, helyére nemcsak levegő, hanem a lombikból újabb étergőz áramlik, gyorsítva ezzel az éter elforrását.

3. Hosszú, keskeny, függőleges üvegcsövet egy vele azonos tengelyű, de sokkal szélesebb, r külső sugarú másik üvegcső vesz körül. E szélesebb csőben sűrűn, egymástól h távolságra elhelyezkedő, R ellenállású körvezetők vannak.

Ha a keskeny csőbe egy m tömegű, d erősségű (mágneses dipólnyomatékú) kicsiny rúd-mágneset ejtünk, az viszonylag hamar elér egy állandó v_0 sebességet, amellyel egyenletesen süllyed.

További kísérleteink során a fenti öt mennyiség (m , d , h , R , r) közül az egyiket mindig a *kétszeresére* növeljük, miközben a másik négyet nem változtatjuk meg. *Hányszorosára* nő az egyes esetekben a kicsiny rúd-mágnes állandósult végsebessége?

Az eredeti eset: m, d, h, R, r ; ekkor $v = v_0$.

a) $(2m, d, h, R, r)$; $v_a/v_0 = ?$

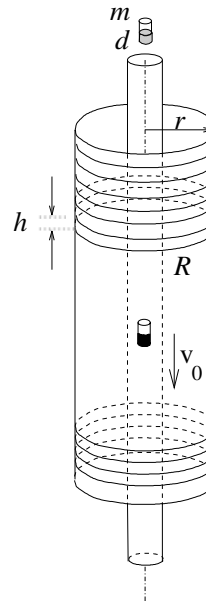
b) $(m, 2d, h, R, r)$; $v_b/v_0 = ?$

c) $(m, d, 2h, R, r)$; $v_c/v_0 = ?$

d) $(m, d, h, 2R, r)$; $v_d/v_0 = ?$

e) $(m, d, h, R, 2r)$; $v_e/v_0 = ?$

A mechanikai súrlódástól és a közegellenállástól, továbbá a körvezetők önindukciójától és kölcsönös indukciójától eltekinthetünk.



(Gnädig Péter)

Megoldás¹. Számítsuk ki, mennyi energia disszipálódik (mennyi Q hő fejlődik) *egyetlen* körvezetőben, miközben a mágnes keresztülesik rajta. Kétféleképpen is következtethetünk erre a Q mennyiségre: egyrészt az energiaviszonyok összevetéséből, másrészt dimenzionális megfontolásokból.

Ha az m tömegű mágnes egyenletesen mozog függőlegesen lefelé a csőben és L utat tesz meg, helyzeti energiája mgL értékkel csökken. Eközben áthalad L/h darab körvezetőn, mindegyikben Q hőt fejleszt, és mivel a mágnes mozgási energiája nem változik, fenn kell álljon, hogy

$$mgL = QL/h, \quad \text{azaz} \quad Q = mgh.$$

Milyen fizikai mennyiségektől és milyen módon függhet Q ? Nyilván függ a hőfejlődés a kicsiny mágnes jellemzőitől (a d dipólnyomatéktól és a v sebességtől), továbbá a körvezető adataitól (az r sugártól és a vezető R elektromos ellenállásától):

$$Q = F(d, v, r, R),$$

ahol F valamilyen négyváltozós függvény, melynek pontos (vagy legalább arányossági tényezők erejéig határozott) alakja megadná a feladat valamennyi kérdésére a választ.

¹ Terpai Tamás dolgozata alapján

Ha dimenziális megfontolásokkal akarjuk „kitalálni”, hogyan függ $F(d, v, r, R)$ az egyes változóitól, nem szabad megfeledkeznünk arról, hogy Q a felsorolt mennyiségek mellett függhet még μ_0 -tól (a vákuum permeabilitásától), ami ugyan nem változó, hanem egy meghatározott mértékegységű és nagyságú mennyiség, de a hőfejlődés képében (lévén az mágnességgel kapcsolatos folyamatok eredménye) ez a fizikai állandó is felbukkanhat. A keresett összefüggés tehát

$$Q = G(d, v, r, R, \mu_0),$$

alakú, ahol G egy ötváltozós függvény, melyet azonban az SI itt előforduló *négy* alapmértékegységének (kg, m, s, A) vizsgálatából nem lehet meghatározni.

A feladat mégis megoldható a dimenzióanalízis módszerével, ugyanis a hőfejlődés és az R ellenállás közötti összefüggés (a többi adat rögzített értéke mellett) fordított arányosság kell legyen (azaz $Q \propto 1/R$), hiszen az áram hőhatása (adott módon változó indukált feszültség mellett) az ellenállás reciprokával arányos. Mondhatjuk tehát, hogy

$$Q \propto \frac{1}{R} f(d, v, r, \mu_0),$$

ahol $f(d, v, r, \mu_0)$ már csak 4 fizikai mennyiségtől függ.

Írjuk fel az egyes fizikai mennyiségek mértékegységét:

$$[Q] = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2}, \quad [1/R] = \frac{\text{s}^3 \text{A}^2}{\text{kg m}^2} \quad [v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad [d] = \text{A m}^2, \quad [r] = \text{m}, \quad [\mu_0] = \frac{\text{kg m}}{\text{A}^2 \text{s}^2}.$$

Ha a keresett f függvényt hatványfüggvény alakban próbáljuk felírni²:

$$h(d, v, r, \mu_0) \propto d^\alpha \cdot v^\beta \cdot r^\gamma \cdot \mu_0^\delta,$$

akkor a 4 független mértékegység hatványainak összehasonlításából a kitevőkre

$$\alpha = 2, \quad \beta = 1, \quad \gamma = -3, \quad \delta = 2$$

adódik. Ezek szerint

$$Q = mgh \propto \frac{(\mu_0 d)^2 v}{R r^3},$$

vagyis a mágnes esési sebességének és a többi paraméternek a kapcsolata:

$$v \propto \frac{m h R r^3}{d^2}.$$

Ez a formula a feladat valamennyi kérdésére megadja választ: akár a tömeget, akár a menettávolságot, vagy a körvezetők elektromos ellenállását növeljük az eredeti érték kétszeresére, a mágnes esési sebessége 2-szer nagyobb lesz. Kétszer erősebb mágnes az eredetinel 4-szer lassabban fog mozogni, végül pedig a körvezetők sugarának kétszeresése a sebességet az eredeti érték 8-szorosára növeli.

d

² Belátható, hogy ezt az általánosság megszorítása nélkül megtehetjük.

Az eredményhirdetésre és az ünnepélyes díjkiosztásra az ELTE új, légymányosi épületének egyik nagyobb előadótermében került sor 1999. november 19-én. Itt először a Versenybizottság elnöke megemlékezett Sztrókay Pálról (1899–1965) és Náray-Szabó Istvánról (1899–1972), akik éppen száz évvel ezelőtt születtek, s az 1917. évi tanulóversenyen az 1. és 2. díjat nyerték. Sztrókay Pál Kossuth-díjas mérnök lett, a Ganznál a villamos vontatás fejlesztésén dolgozott, Kandó Kálmán utáni második emberként. Náray-Szabó István nemzetközi tekintélyű vegyészprofesszor lett, a fizika és a kémia határterületén alkotott: röntgendiffrakcióval kutatta az anyag kémiai-fizikai szerkezetét.

A rövid megemlékezések után került sor idei feladatok megoldásának diszkussziójára. Az első feladat megoldását Radnai Gyula, a másodikat az egyik versenyző (Tóth Bálint), a harmadikat Gnädig Péter mutatta be. A harmadik feladathoz kapcsolódóan, azt modellezve kísérleteket is láthattak a megjelentek: más-más falvastagságú, más-más fémből készült csöveknél különböző erősségű rúdágnesek esési idejét figyelhették meg, s így összehasonlíthatták különféle körülmények között kialakuló örvényáramok fékező hatását.

Az ünnepélyes eredményhirdetésen Fehér István, az ELFT alelnöke adta át (a feladatok kitűzőiből álló) Versenybizottság által odaítélt díjakat. A Társulat által biztosított pénzjutalmak mellett a Nemzeti Tankönyvkiadótól könyvtalványokat kaptak a díjazott versenyzők, akiknek jelen levő tanárai a Műszaki Kiadó és a Tankönyvkiadó ajándékkönyveiből válogathattak. Sajnos nem mindenki tudott eljönni: az éppen a díjkiosztás napján kitört hóvihár miatt maradt le az ünnepségről néhány régi Eötvös-verseny nyertes is.

A mostani verseny eredménye a következő:

*Első díjat kapott: **Terpai Tamás**, az ELTE matematikus hallgatója, aki a Fazakas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnáziumban érettségizett mint *Horváth Gábor* tanítványa.*

*Második díjat kapott a verseny 2–6. helyezette: **Hegedűs Ákos**, a pécsi ciszterci Nagy Lajos Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Orovica Márkné* tanítványa; **Katona Gergely**, az ELTE fizikus hallgatója, aki a budapesti ELTE Trefort Ágoston Gyakorlóiskolában érettségizett mint *Szörényi Zoltán* tanítványa; **Pesti Gábor**, a nagykanizsai Batthyány Lajos Gimnázium 11. osztályos tanulója, *Pirity János* tanítványa; **Péterfalvi Csaba Géza**, az ELTE geofizikus hallgatója, aki a szekszárdi Garay János Gimnáziumban érettségizett mint *Bayer József* tanítványa; **Tóth Bálint**, az ELTE fizikus hallgatója, aki a Fazakas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnáziumban érettségizett mint *Horváth Gábor* tanítványa.*

*Harmadik díjat kapott a verseny 7–10. helyezette: **Béky Bence**, a Fazakas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium 10. osztályos tanulója, *Horváth Gábor* tanítványa; **Csillag Kristóf**, a püspökladányi Karacs Ferenc Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Lajtosné Buzási Márta* tanítványa; **Gáspár Merse Előd**, a Fazakas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Horváth Gábor* tanítványa; **Patay Gergely**, a debreceni Tóth Árpád Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Kovács Miklós* és *Szegedi Ervin* tanítványa.*

*Dicséretben részesült a verseny 11–13. helyezette: **Buruzs Ádám**, a szegedi Radnóti Miklós Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Mike János* tanítványa; **Czigler István**, a budapesti Lauder Javne Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Tóth Eszter* tanítványa; **Kenyeres Péter**, a POTE orvostanhallgatója, aki a zalaegerszegi Zrínyi Miklós Gimnáziumban érettségizett mint *Pálovics Róbert* tanítványa.*

Az 1999. évi Eötvös-verseny díjazottai (fentről lefelé, balról jobbra): Péterfalvi Csaba Géza, Terpai Tamás, Gáspár Merse Előd, Buruzs Ádám, Katona Gergely, Csillag Kristóf, Hegedűs Ákos, Patay Gergely, Tóth Bálint, Pesti Gábor és Czigler István.

Az 1. díjas versenyző 10 000 Ft pénzjutalmat és 5 000 Ft értékű könyvvutalványt, a 2. díjasok 6 000 Ft pénzjutalmat és 4 000 Ft értékű könyvvutalványt, a 3. díjasok 4 000 Ft pénzjutalmat és 4 000 Ft értékű könyvvutalványt, a dicséretben részesültek 3 000 Ft értékű könyvvutalványt kaptak.

Gratulálunk a nyerteseknek és tanáiraiknak!

Gnädig Péter, Radnai Gyula